

4^{ème} Sc-Exp

Série N°:5

(Limite Continuité)

EXERCICE N°1 :

Soit la fonction g définie sur $[2, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x-2}+1)}$

1/ a- Montrer que g est continue sur $[2, +\infty[$.

b- Montrer que g est décroissante sur $[2, +\infty[$.

c- En déduire que g est majorée sur $[2, +\infty[$.

2/ a- Montrer que l'équation $g(x) = 1/2$ admet au moins une solution α dans $[2, 3]$

b- En déduire que α est une solution de l'équation : $(x-1)\sqrt{x-2} = 3-x$

3/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3}$

a- Déterminer le domaine de définition D_f de f .

b- Montrer que f est prolongeable par continuité en 3 et définir ce prolongement.

4/ Soit la fonction h définie sur $] -\infty, 3[$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3} & \text{si } x \in [2, 3[\\ \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{si } x \in]-\infty, 2[\end{cases}$$

a- Etudier la continuité de h en 2.

b- Déterminer le domaine de continuité de h .

EXERCICE N°2 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \sin(\frac{1}{x})) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1/ a- Vérifier que pour tout $x > 0$; $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

b- Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2/ a- Montrer que : $\forall x < 0, 3x \leq f(x) \leq x$

b- Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

3/ Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g .

4/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

EXERCICE N°3 :

Dans le graphique ci-dessous, on tracera la courbe ζ_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et

admettant :

- la droite $x = 1$ comme asymptote verticale

- la droite (AB) comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

- une branche parabolique de direction (AB) au voisinage de $-\infty$.

1/ Par une lecture graphique déterminer : $f(]-\infty, -1])$; $f(]1, 3])$ et $f(]-5, -1])$.

2/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

a- Déterminer le domaine de définition de $g \circ f$.

b- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2} g \circ f(x)$

c- $g \circ f$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
Si oui définir ce prolongement.

